А. А. Леонтьев

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,

alexey_leontiev@inbox.ru

ПОВЕДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Пусть Ω — неограниченная область $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)\}$, $n \geqslant 2$. В цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ рассматривается первая смешанная задача

$$(|u|^{k-2}u)_t = \sum_{\alpha=1}^{n} (|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha - 2} u_{x_\alpha})_{x_\alpha}; \tag{1}$$

$$u(t, \mathbf{x})\Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega; \tag{2}$$

$$u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}),\ \varphi(\mathbf{x}) \in L_k(\Omega),\ \varphi_{x_\alpha}(\mathbf{x}) \in L_{p_\alpha}(\Omega),\ \alpha = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Будем считать, что $k \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n$, $k > 1$, в случае $p_1 < k$ решение за конечное время стабилизируется к нулю.

Теорема 1. *Если выполнено условие*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha < 1 + n/p_n, \tag{4}$$

то обобщенное решение $u(t, \mathbf{x})$ *задачи* (1) – (3) *с ограниченной начальной функцией* $\varphi(\mathbf{x})$ *является ограниченным.*

Далее, будем рассматривать области, расположенные вдоль выделенной оси Ox_s, $s \in \overline{1, n}$ (область Ω лежит в полупространстве $\mathbb{R}^+{}_n[s] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n \,|\, x_s > 0\}$, сечение $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто и ограничено при любом $r > 0$). Введем обозначения: $\Omega^r = \{x \in \Omega \mid 0 < x_s < r\}$, $r > 0$,

$\|\cdot\|_{p,Q}$ — норма в $L_p(Q)$, $p \geqslant 1$, значение $Q = \Omega$ опускается. Пусть начальная функция имеет ограниченный носитель:

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega^{z_0}, \quad z_0 > 0. \tag{5}$$

Теорема 2. *Если выполнены условия* (4), (5), *то существуют* $C_{p_1}, C_k > 0$ *и ограниченное решение* $u(t,\mathbf{x})$ *задачи* (1) – (3) *такие, что для* $t \geqslant 0$ *выполнены неравенства*

$$\|u(t)\|_k \geqslant \|\varphi\|_k \left(C_{p_1}(\varphi)t + 1\right)^{-1/(p_1-k)}, \quad p_1 > k,$$

$$\|u(t)\|_k \geqslant \|\varphi\|_k \exp\left(-C_k(\varphi)t\right), \quad p_1 = k.$$

Введем геометрические характеристики $\nu_1(r)$, $\mu_1(r)$:

$$\nu_1(r) = \inf\left\{\|g_{x_1}\|_{p_1,\gamma_r} \;\middle|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \|g\|_{p_1,\gamma_r} = 1\right\}, \quad r > 0,$$

$$\mu_1(r) = \inf\left\{\|g_{x_1}\|_{p_1,\Omega^r} \;\middle|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{k,\Omega^r} = 1\right\}, \quad r > 0.$$

Предполагается, что

$$\int_1^\infty \nu_1^{p_1/p_s}(r)dr = \infty, \quad \lim_{r\to\infty}\mu_1(r) = 0. \tag{6}$$

Пусть $r_{p_1}(t), r_k(t), t > 0$ — произвольные положительные функции, удовлетворяющие, соответственно, неравенствам

$$\exp\left(\kappa_1 \int_1^{r_{p_1}(t)} \nu_1^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right) \geqslant \left(\mu_1^{p_1}(r_{p_1}(t))t\right)^{1/(p_1-k)}, \quad p_1 > k.$$

$$\mu_1^{p_1}(r_k(t))t \geqslant \int_1^{r_k(t)} \nu_1^{p_1/p_s}(\rho)d\rho, \quad p_1 = k.$$

Теорема 3. *Если выполнены условия* (4) – (6) *и* $s \in \overline{2,n}$, *то найдутся* $M_{1,p_1}(\varphi,k,p_s,k), k_1(\varphi,k,p_s)$ *и ограниченное решение*

$u(t, \mathbf{x})$ *задачи* (1) – (3) *такие, что при всех* $t > 0$ *справедливы оценки*

$$\|u(t)\|_k \leqslant M_{1,p_1} \left(t\mu^{p_1}(r_{p_1}(t))\right)^{-1/(p_1-k)}, \quad p_1 > k;$$

$$\|u(t)\|_k \leqslant M_{1,k} \exp\left(-k_1 \int_1^{r_k(t)} \nu_1^{p_1/p_s}(\rho) d\rho\right) \|\varphi\|_k, \quad p_1 = k.$$

Е. Ю. Линник

Нижегородский государственный университет

им. Н. И. Лобачевского,

ElenkaLinnik@gmail.com

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРА И ПРОНИКАНИЯ В МЯГКИЕ ГРУНТОВЫЕ СРЕДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Проводится анализ методов поиска оптимальной формы тела вращения минимального сопротивления при его проникании в мягкие грунтовые среды. Применяется модель локального взаимодействия, в соответствие с которой давление в каждой точке боковой поверхности отождествляется с давлением на внутренней поверхности сферической полости и представляется в виде квадратичной зависимости от скорости проникания [1, 2]. Сравнение осуществляется с расчетами в осесимметричной постановке в рамках грунтовой среды Григоряна, которая записывается в цилиндрической системе координат в виде системы дифференциальных уравнений и конечных соотношений, учитывающих свойства среды: ударную сжимаемость и сопротивление сдвигу [3].